直交する接線の交点の軌跡（楕円）

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点で接する2直線が直交するとき，その交点の軌跡は

円　$x^2+y^2=a^2+b^2$　である。

証明　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ …… ①（楕円 C とする）において，

傾きが m である接線 l_1 の方程式を求める。

まず，$y=mx+n$　とおき，①に代入。　$b^2x^2+a^2(mx+n)^2=a^2b^2$　$\Leftrightarrow$

$(a^2m^2+b^2)x^2+2mna^2x+a^2(n^2-b^2)=0$

判別式を D とすると，$D/4\ =(mna^2)^2-a^2(a^2m^2+b^2)(n^2-b^2)=0$　より，

$n^2=a^2m^2+b^2$，　よって，$n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

l_1：$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$　…… ②

次に，l_1 と垂直な接線 l_2 の方程式を求める。

$m=0$ のとき，l_1：$y=\pm b$ となるので，垂直な接線 l_2 は　$x=\pm a$ …… ③

となる。（複号任意）

$m\neq 0$ のとき，l_2 の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ となるので，②で $m\to -\dfrac{1}{m}$ とすればよい。

よって，l_2：$y=-\dfrac{1}{m}x\pm\dfrac{\sqrt{b^2m^2+a^2}}{m}$　$\Leftrightarrow$　$x+my=\pm\sqrt{b^2m^2+a^2}$ …… ④

②より，　l_1：$-mx+y=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ……②′　とする。

ここで l_1 と l_2 の交点は，②′，④を同時に満たすので，交点の軌跡を求めるには，

②′，④から m を消去すればよい。そこで，辺々を2乗して，

$(-mx+y)^2=a^2m^2+b^2$　……（②′)^2

$(x+my)^2=b^2m^2+a^2$　……　④^2

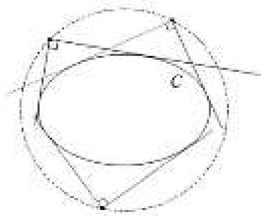


図 1

辺々を加えると，　$(m^2+1)x^2+(m^2+1)y^2=(m^2+1)(a^2+b^2)$

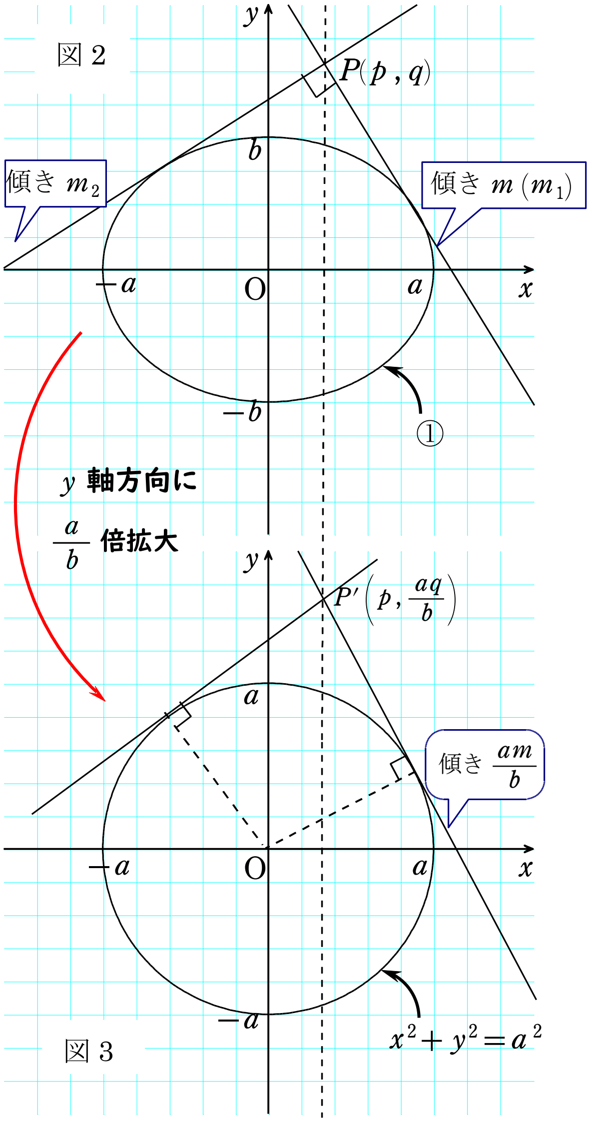
$m^2+1>0$ なので，　$x^2+y^2=a^2+b^2$　…… $(*)$

③より，$m=0$ のときの2接線の交点は，$(\pm a,\ \pm b)$（複号任意）となるが，

この点も，円 $(*)$ の上にある。これで，楕円 C の接線で直交するものはすべてあげられたので，楕円 C において，直交する2接線の交点の軌跡は，$(*)$，つまり，

原点中心，半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の円となる。　終

山脇の超数学講座 No. 64



別解　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……① について，

楕円の外側にある点 $P(p, q)$ を通り，傾き m の直線が ① に接しているとする。

方程式は　$y=m(x-p)+q$ ……⑤

今，楕円も接線も y 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍拡大すると，

①は 円 $x^2+y^2=a^2$ …… ⑥ に移り，

P は $P'\left(p, \dfrac{aq}{b}\right)$ に移り，傾きは $\dfrac{am}{b}$ となるから，

接線 ⑤ は $y=\dfrac{am}{b}(x-p)+\dfrac{aq}{b}$ …… ⑦となる。

変形して　$amx-by+a(q-mp)=0$ …… ⑦′

⑦′ は円 ⑥に接しているから，点と直線の距離より，

$$\frac{|\,a(q-mp)\,|}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=a \iff (q-mp)^2=a^2m^2+b^2$$

$$\iff (a^2-p^2)m^2+2pqm+b^2-q^2=0 \quad \cdots\cdots ⑧$$

[1]　$a^2-p^2\neq 0$ のとき，

図 2 で直交する 2 接線の傾きを m_1, m_2 とすると，

$m_1m_2=-1$ …… ⑨

一方, m_1, m_2 は ⑧ の解であり，解と係数の関係より，

$m_1m_2=\dfrac{b^2-q^2}{a^2-p^2}$ …… ⑩

⑨，⑩より，　$b^2-q^2=-(a^2-p^2) \iff p^2+q^2=a^2+b^2$ …… ⑪

[2]　$a^2-p^2=0$ のとき，　$p=\pm a$ で直交する 2 接線の方程式は，

$x=\pm a$，$y=\pm b$ であり，交点は $(\pm a, \pm b)$ （複号任意）

[1]，[2] を合わせて，　⑪の (p, q) を (x, y) に変換することにより，

直交する 2 接線の交点の軌跡は，　円　$x^2+y^2=a^2+b^2$　である。 終

解説　「山脇の超数学 No.36」以来の楕円の登場となった。「楕円に対して 2 本の接線を引いて,それらが直交する（垂直に交わる）とき,その交点の軌跡は円になる」という美しい性質である。放物線では，直交する 2 接線の交点は「**準線**」上にあるので，楕円もそれにならって，この軌跡の円を「**準円**」と呼んでいる。 ここでは，接線の交点の座標を求めずに交点の軌跡を求める2 つの証明を示した。楕円には興味深い性質がいくつもある。